DS2 VERSION A CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 11 points.

1. 3 points, 2 pour f, 1 pour f'. Je veux être convaincu que ni f ni sa dérivée n'ont de limite, mais tout en restant bornées. Pour que f' soit bornée, il faut faire attention à ce que f ne monte ou ne descende pas trop fort.

2. **a.** 1 point, il suffit de calculer la limite de g en 0. On rappelle qu'une fonction qui tend vers 0 multipliée par une fonction bornée tend vers 0. On pouvait éventuellement l'admettre ou plutôt le redémontrer avec le théorème des gendarmes.

b. 1 point, c'est la même chose.

c. 1 point, il suffit de se souvenir comment calculer la dérivée d'une composée.

d. 2 points, il faut recalculer le taux d'accroissement de g' en 0. Et expliquer cette fois-ci que ce taux d'accroissement diverge.

e. 2 points, question plus difficile. Il s'agit de voir que $g(x) = \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$.

3. 1 point.

Exercice 2 : 43 points.

1. 5 points, 1 par ligne.

2. 2 points, 1 pour le mot "uniforme" ou "équiprobabilité", 1 pour la valeur de la probabilité.

3. **a.** 3 points, 1 pour l'explication, 1 pour le support et 1 pour l'expression de la loi (ou alors 2 points pour dire que la loi est géométrique avec le bon paramètre).

b. 1 point, la commande est donnée dans l'introduction.

4. **a.** 1 point, une explication en une phrase suffit.

b. 1 point, il suffit de dire que la valeur de la probabilité est la géométrique en 1.

c. 3 points, 1 pour citer la formule des probas totales, 1 pour le système complet d'événements, 1 pour le calcul.

5. **a.** 1 point, une brève explication suffit.

b. 1 point, c'est à nouveau la géométrique.

c. 3 points, comme en **4.c**

6. **a.** 2 points, 1 pour le télescopage, 1 pour le calcul, on peut aussi calculer ces deux sommes séparément, elles sont géométriques. Au moins 1 point en moins si on fait un télescopage directement dans la somme infinie sans passer par la somme partielle.

b. 3 point, 1 pour dire que $\mathbb{P}([X_n \geqslant 2]) = \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{j=2}^{+\infty}(X_n = j)\right]\right)$, 1 pour citer l'indépendance et 1 pour faire le calcul (ou plutôt s'apercevoir que c'est celui de la question précédente).

7. **a.** 2 points, 1 pour la probabilité de l'événement contraire, 1 pour la conclusion.

b. 2 points, il faut donner une explication convaincante que l'événement $(X_n = 0)$ est le même que U_{n+1}.

8. **a.** 3 points (question un peu dure), 1 pour l'expression de l'espérance, 2 pour le calcul.

- **b.** 1 point, question étrange, il suffit de connaître la commande.

9. **a.** 3 points, 1 pour l'encadrement, 1 pour la croissance de l'intégrale, 1 pour la conclusion.
- **b.** 3 points, 1 pour sommer les inégalités précédente, 1 pour la relation de Chasles, 1 pour la conclusion.
- **c.** 2 points, 1 pour chaque inégalité.
- **d.** 2 points, 1 pour penser à diviser $E(X_n)$ par $\ln(n)$, 1 pour conclure avec le théorème des gendarmes.

Exercice 3 : 37 points.

1. 2 points, aucune confusion entre les objets n'est tolérée.

2. 2 points, 1 pour non vide, 1 pour la stabilité. 0 si la caractérisation abstraite est mal exprimée.

3. 2 points, 1 pour dire que ${}^t(XY) =^t Y^t X$ et 1 pour conclure avec la symétrie de A.

4. **a.** 1 point, bizarrement beaucoup de carrés ont répondu.
- **b.** 3 points, c'est une question difficile, c'est le pivot à paramètre.
- **c.** 2 points.
- **d.** 6 points, 2 pour chaque système. On rappelle que résoudre un système consiste à présenter les solutions sous forme de vect.
- **e.** 4 points, 1 pour dire comment P est construite, 1 pour P^2, 1 pour en déduire P^{-1} (ok si on fait le pivot mais c'est dommage de perdre autant de temps) et 1 pour le calcul de $P^{-1}AP$.

5. **a.** 3 points, 1 pour poser le problème, 2 pour résoudre le système. Montrer que les matrices proposées sont dans E_D ne rapporte aucun point, ce n'est pas ce qu'il faut faire.
- **b.** 2 points, 1 pour la base, 1 pour la dimension. Dommage de passer à côté de cette question, elle est très simple et il suffit de lire la question précédente pour pouvoir la faire.

6. **a.** 3 points, attention à l'équivalence, 1 point seulement si un seul sens ne marche.
- **b.** 2 points.

7. 2 points, question de conclusion facile, ce sont évidemment les matrices de E_A.

8. 3 points, 1 pour le théorème du rang, 1 pour la dimension du noyau, 1 pour la conclusion.

Exercice 4 : 29 points.

1. **a.** 2 points, on l'a fait au moins 3 fois.
- **b.** 2 points, 1 pour chaque, il faut faire une IPP dans la deuxième, et il faut dire que les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ (donc il faut les poser).

2. 2 points, argument de comparaison classique.

3. 1 point, question de cours.

4. 2 points, 1 pour reconstruire l'inégalité entre les intégrandes, 1 pour conclure avec la croissance de l'intégrale.

5. **a.** 2 points.
- **b.** 2 points, comme à la question **4**.
- **c.** 2 points, idem.
- **d.** 2 points, 1 pour les gendarmes au moins une fois, 1 pour la conclusion.

6. **a.** 2 points, 1 pour la linéarité, 1 pour la conclusion.
- **b.** 2 points, plusieurs petites choses à voir.

7. **a.** 2 points, il suffit de savoir s'exprimer.
- **b.** 2 points, 1 pour citer correctement le cours, 1 pour donner la valeur de $F'(0)$.

8. 4 points, 1 pour la tangente en 0, 1 pour la monotonie respectée, 1 pour la limite en $+\infty$, 1 pour la clarté générale du dessin.

Orthographe, présentation, lisibilité, ... : 7 points.

Total : 128 points. Divisés par 4 pour faire une note sur 20 (il y a 32 points en tout).

Commentaires généraux/erreurs fréquentes.

Stratégie générale.

- À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'année (y compris aux concours), l'orthographe rentre dans le barème (2 points sur 20 à prendre).
- La gestion du temps pose problème, beaucoup de questions très simples sont ignorées et beaucoup de temps perdu sur des questions difficiles. Il fallait passer du temps sur l'exercice 4 qui est très simple.
- Encore de trop nombreux raisonnements par équivalence qui n'ont pas lieu d'être ou de symboles $\iff$ inappropriés.
- Le niveau en informatique et en probas est alarmant, alors même que le sujet contient plutôt peu de probas (1/2 exercice).

Exercice 1.

- Cet exercice était globalement difficile et plutôt mal réussi.
- Le graphe de la fonction f a posé beaucoup de problème. Pour que la dérivée de f soit bornée, il ne faut pas que f varie trop vite et il ne suffit pas de prendre f bornée pour que f' le soit (exemple $\sqrt{x}$).
- Très peu de gens savent dériver une composée. On rappelle que la dérivée de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 2.

- Le niveau est catastrophique en probas.
- Presque personne n'a compris quelle était la loi de X_n conditionnée à U_k.
- Les questions de "déconditionnement" ne donnent pas lieu par réflexe à l'utilisation de la formule des probas totales. Il faut d'urgence prendre la mesure de ce genre de fragilités.
- On rappelle que $f(t) \leqslant g(t) \iff \int f(t)dt \leqslant \int g(t)dt$ est **FAUX** et sera lourdement sanctionné.
- La partie "analyse" de l'exercice n'a pas permis de reprendre pied.
- Pour montrer que deux suites sont équivalentes, le réflexe doit être de diviser l'une par l'autre (c'est la première définition du cours !).

Exercice 3.

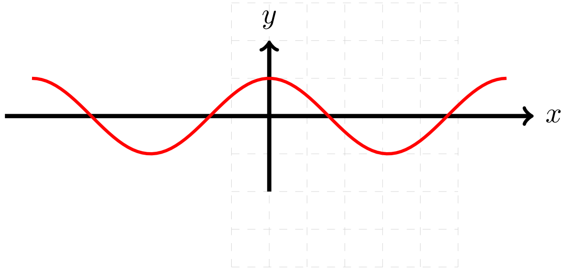
- La première question a donné lieu à une avalanche d'erreurs de langage.
- Il serait temps de réviser la définition d'un sous-espace vectoriel (et la caractérisation abstraite). Énormément de confusions avec la linéarité d'une application.
- Pourquoi perdre un temps fou sur la question **4.b** alors que j'ai répété 10 fois que c'était une question difficile.
- Des erreurs dans la résolution des systèmes.
- Une matrice que le sujet appelle D est toujours diagonale.

Exercice 4.

- Énormément de confusions dans la réduction des arguments de comparaison pour la convergence des intégrales. La croissance de l'intégrale n'a rien à faire à cet endroit là.
- L'exercice est de loin le plus simple des 4, tout se passe sans entrave avec une application directe du cours.

Correction détaillée.

Exercice 1 **1.** On dessine une fonction bornée. La raison pour laquelle f n'a pas de limite en $+\infty$ doit donc être parce que f oscille. On fait attention à ne pas faire varier f trop rapidement pour que sa dérivée soit bornée aussi. On peut par exemple prendre une fonction de ce type.



2. **a.** Puisque f est bornée, il existe M tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |g(x)| \leqslant |x|^3 M.$$

Or puisque $\lim\limits_{x\to 0} |x|^3 M = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $g(x)$ tend vers 0 en 0.

b. Le taux d'accroissement de g en 0 est

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right).$$

On montre, exactement comme à la question précédente que ce taux d'accroissement tend vers 0, toujours en utilisant le fait que f est bornée.

c. On dérive g comme une composée (g est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables) :

$$g'(x) = 3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Attention à savoir dériver une composée!!

d. On étudie cette fois le taux d'accroissement de g' en 0 :

$$\frac{g'(x)-g'(0)}{x} = \frac{3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3x f\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or cette fois-ci, on a bien comme plus haut

$$\lim_{x\to 0} 3x f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

mais $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ diverge lorsque x tend vers 0. Ainsi le taux d'accroissement de g' diverge en 0 et on en déduit que g' n'est pas dérivable en 0.

e. C'est une question plus difficile. On a

$$\frac{g(x)}{x^2} = x f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 0$. On s'aperçoit donc que $g(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$. Ceci est un développement limité d'ordre 2 en 0 (pour lequel il n'y a que du reste!). Ainsi g admet bien un développement limité en 0 à l'ordre 2.

3. La fonction g a donc les propriétés suivantes :

- Elle n'est pas dérivable 2 fois en 0.

- Elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Or le cours nous dit (c'est la formule de Taylor à l'ordre 2) que si une fonction est dérivable 2 fois en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2. La fonction g fournit donc un contre-exemple à la réciproque.